

İNTEGRAL



KONU ANLATIMLI EĞİTİM SETİ

www.orijinalyayinlari.com

ORİJİNAL MATEMATİK VIDEO ÇÖZÜM
UYGULAMASINI
İNDİR



VİDEOLAR CEBİNE
GELSİN



Akıllı Tahta için
www.lisedestek.com



[youtube.com/ Orijinal Matematik](https://youtube.com/OrijinalMatematik)
Video Çözümler: FIRAT POLAT

@orijinalmatematik

AYT ORİJİNAL İNTEGRAL FASİKÜLÜ

Copyright©

Bu kitabın her hakkı yayınevine aittir.

Hangi amaçla olursa olsun, bu kitabın tamamının ya da bir kısmının, kitabı yayınlayan ve yayınevinin önceden izni olmaksızın elektronik, mekanik, fotokopi ya da herhangi bir kayıt sistemi ile çoğaltılması, yayınlaması ve depolanması yasaktır.

ISBN

978-605-06571-4-2

Genel Yayın Koordinatörü

Zafer BALCI

Yazarlar

Zafer BALCI

Abdurrahim ŞAHİN

Barış ALTAY

Hasan BOSTANLIK

Fatih DAYI

Murat ÇEVİK

Editörler

Ümit CAN

Şelale AKKAYA

Özge BALCI

Dizgi

Yasemin ÜKİZ

BASKI VE CİLT

Özyurt Matbaacılık

ANKARA

1. BASKI

2022



İLETİŞİM

Ostim Mahallesi 1207. Sokak 3/C-D Ostim/Yenimahalle/ANKARA

Tel: (0312) 395 13 96 Fax: (0312) 394 10 04

ÖN SÖZ

Sevgili Öğrenciler ve Değerli Meslektaşlarımız,

Orijinal Matematik Yayınları olarak idealleri olan her öğrencimize yol göstermek ve onların başarılarını artırmak için "İntegral Konu Anlatımlı Eğitim Seti" adını verdiğimiz fasikülümüzü hazırladık.

Fasikülümüzde detaylı konu anlatımları, çözümlü örnekler, "Bir de Orijinalden Dinle!" adlı açık uçlu sorular, kazanım testleri ile bölüm sonunda bir Orijinal Yayınları klasiği olan "ÖSYM Tarzı Testler" yer almaktadır.

Konu anlatımlarımız ve "Bir de Orijinalden Dinle!" açık uçlu sorularımız, Orijinal Matematik Youtube kanalında özel ders formatında izleyebilmeniz için hazırlanmıştır. Kazanım Testleri ve ÖSYM Tarzı Testlerimizin çözümlerini Orijinal Matematik video çözüm uygulamasından dinleyebilirsiniz. Çalışmamızın tamamı video çözümlüdür.

Çalışmamızda desteklerinden dolayı; Serkan ÖZKAL, Nilgün KOCA, İlkay AKKOYUN, Nurullah KILIÇ, Mehmet SÖYLEMEZ, Yusuf SEZGİN, Mikail KARACA, Gürsel HALASTAR, Oktay DÖNMEZ hocalarıma teşekkür ederiz.

ORİJİNAL AİLESİ

1. BÖLÜM

- Diferansiyel Kavramı / 4
 - Belirsiz İntegral / 7
- İntegral Alma Kuralları / 19
 - Değişken Değiştirme / 41
 - Belirli İntegral / 52
- Parçalı ve Mutlak Değerli Fonksiyonların İntegrali / 89

2. BÖLÜM

- Riemann Toplamları / 104
- Belirli İntegralle Alan Hesabı / 112

3. BÖLÜM

- ÖSYM Tarzı Tarama Testleri / 173



DİFERANSİYEL KAVRAMI



x değişkeninde meydana gelen sığra yakın değışime dx denir.

dx , x değışkeninin diferansiyeli olarak adlandırılır.

x değışkenindeki dx kadar olan bu değışime karşılık $y = f(x)$ fonksiyonundaki değışim dy olarak adlandırılır.

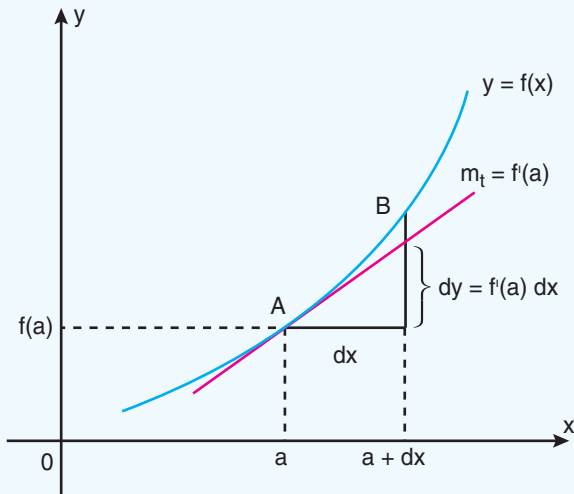
Aşığıda bir f fonksiyonunun grafiğı verilmiştir. Verilen grafiğte görüldüğü gibi herhangi bir A noktasının koordinatları $(a, f(a))$ 'dır. Bu noktadan sağa doğru x, dx kadar artar ise B noktasının apsisi $(x + dx)$ elde edilmiş olur. B noktasının koordinatları $(a + dx, f(a + dx))$ olacaktır.

Eğer verilen f fonksiyonuna tam A noktasında bir teğet çizilecek olursak, bu çizilen teğetin eğimi $f'(a)$ olur. Bu eğim kullanılarak fonksiyonun A noktasındaki diferansiyeli (dy) bulunması istenirse;

$$dy = m dx = f'(a) dx$$

$$dy = f'(a) dx$$

İşte buradaki dy 'ye, A noktasında fonksiyonun diferansiyeli denir.



$d(f(x)) = f'(x) dx$ ifadesine f fonksiyonunun x değışkenine göre diferansiyeli denir.

ÖRNEK - 1

$$I. f(x) = 3x^2 + x$$

$$II. g(t) = t^3 - 1$$

$$III. h(u) = \frac{1}{u}$$

fonksiyonlarının bağılı oldukları değışkenlere göre diferansiyellerini hesaplayalım.

ÇÖZÜM

$$I. f(x) = 3x^2 + x$$

$$d(f(x)) = f'(x) dx$$

$$d(f(x)) = (6x + 1) dx \text{ elde edilir.}$$

$$II. g(t) = t^3 - 1$$

$$d(g(t)) = g'(t) dt$$

$$= 3t^2 dt \text{ elde edilir.}$$

$$III. h(u) = \frac{1}{u}$$

$$d(h(u)) = h'(u) du$$

$$= -\frac{1}{u^2} du \text{ elde edilir.}$$

ÖRNEK - 2

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

fonksiyonunun diferansiyelini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$d(f(x)) = f'(x) dx \text{ olduğundan}$$

önce f fonksiyonunun türevini alalım.

$$f'(x) = \frac{(x+1) - x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\text{Buradan; } df(x) = \frac{dx}{(x+1)^2} \text{ olarak bulunur.}$$



ÖRNEK - 3

$$d(f(x)) = 3x^2 dx + \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

olduğuna göre, $f'(1)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$d(f(x)) = f'(x) dx$ olduğundan,

$$f'(x) dx = 3x^2 dx + \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$f'(x) dx = \left(3x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ bulunur.}$$

O halde, $f'(1) = 4$ olur.

ÖRNEK - 4

Pozitif gerçık sayılar kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonu için

$$d(f(x^2)) = (\sqrt{x} + 1) dx$$

eşitliği veriliyor.

Buna göre, $f'(1)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$$d(f(x^2)) = (\sqrt{x} + 1) dx$$

$$(f(x^2))' dx = (\sqrt{x} + 1) dx$$

$$2x \cdot f'(x^2) dx = (\sqrt{x} + 1) dx$$

$$f'(x^2) = \frac{\sqrt{x} + 1}{2x}$$

$x = 1$ için; $f'(1) = 1$ bulunur.

ÖRNEK - 5

$$x^2 d\left(\frac{f(x)}{x}\right)$$

ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$d\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \left(\frac{f(x)}{x}\right)' dx$$

$$= \left(\frac{x \cdot f'(x) - f(x)}{x^2}\right) dx$$

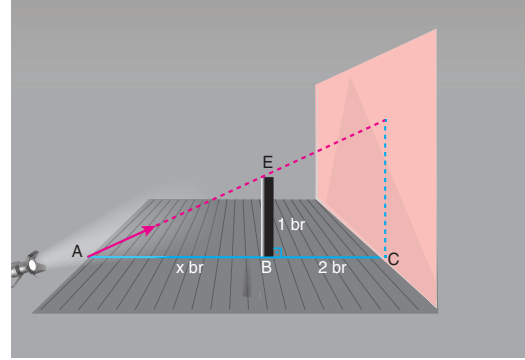
bulunur.

Şimdi yerine yazalım:

$$x^2 d\left(\frac{f(x)}{x}\right) = x^2 \cdot \left(\frac{x \cdot f'(x) - f(x)}{x^2}\right) dx$$

$$= (x f'(x) - f(x)) dx \text{ olur.}$$

ÖRNEK - 6



$$|EB| = 1 \text{ birim}$$

$$|BC| = 2 \text{ birim}$$

$$|AB| = x \text{ birim}$$

Zemin üzerindeki A noktasında bulunan ışık kaynağı ve yere dik konumlandırılmış siyah renkli levha ile elde edilen düzeneğin görünümü yukarıdaki gibidir.

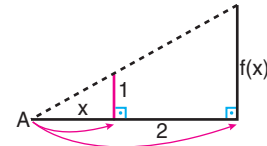
x : A noktasının metal levhaya olan uzaklığı

$f(x)$: "Metal levhanın duvara yansıyan gölge boyu"

Buna göre, f fonksiyonunun diferansiyelini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

x değişkenine bağlı oluşan gölge boyunu benzerlik yardımıyla hesaplayalım.



$$\frac{x}{x+2} = \frac{1}{f(x)} \text{ buradan}$$

$$f(x) = \frac{x+2}{x} \text{ olarak bulunur.}$$

$$df(x) = f'(x) dx$$

$$df(x) = \frac{x - (x+2)}{x^2} dx$$

$$df(x) = \frac{-2}{x^2} dx \text{ olur.}$$



1. $f(x) = 3x^2 - x + 12$
fonksiyonunun diferansiyeli aşağıdakilerden hangisidir?
- A) $6x \, dx$ B) $(x^3 - x^2) \, dx$ C) $(6x - 1) \, dx$
D) $(x^2 + 2) \, dx$ E) $6 \, dx$

2. $d(f(x)) = \sqrt{x} \, dx$
olduğuna göre, $f'(4)$ kaçtır?
- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 8

3. $d(x + f(x)) = (x^2 + 3x) \, dx$
olduğuna göre, $f''(2)$ kaçtır?
- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

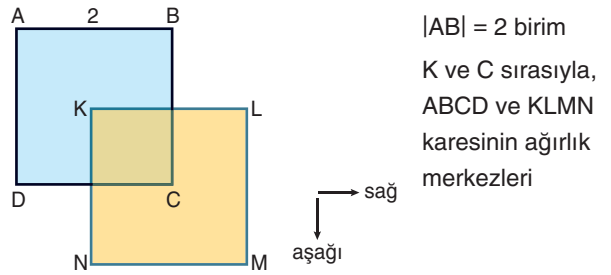
4. $d(x \cdot f'(x)) - d(f(x))$
ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?
- A) $f'(x) \, dx$ B) $f''(x) \, dx$ C) $x \cdot f''(x) \, dx$
D) $x \cdot f'(x) \, dx$ E) $f(x) \, dx$

5. Gerçek sayılar kümesi üzerinde türevlenebilen bir f fonksiyonu için
 $d(x \cdot f(x)) = (x + 1) \, dx$
eşitliği veriliyor.
 $f(1) = 3$ olduğuna göre, $f'(1)$ değeri kaçtır?
- A) -3 B) -2 C) -1 D) 0 E) 1

6. $d(f(x+1)) = \frac{(2x+1) \, d(x^2)}{x}$
olduğuna göre, $f''(x)$ kaçtır?
- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

ORJİNAL MATEMATİK

7. Şekilde ABCD ve KLMN kare biçimindeki mavi ve sarı renkli iki cam plaka verilmiştir.



$0 < x < 1$ olmak üzere:

$f(x)$ = "Sarı renkli plaka x birim sağa, x birim aşağı yönlü kaydırıldığında oluşan yeşil renkli bölgenin alanı" biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre, f fonksiyonunun diferansiyeli aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $2x \, dx$ B) $2 \cdot (x - 1) \, dx$ C) $x^2 \, dx$ D) $x \, dx$ E) $(x-1) \, dx$

Cevap Anahtarı

1.C	2.B	3.C	4.C	5.C	6.D
7.B					



BELİRSİZ İNTEGRAL



Türevi veya diferansiyeli bilinen bir fonksiyonun ilk halini (ilkeli) bulma işlemine **İNTEGRAL ALMA** işlemi denir.



$x^2, x^2+1, x^2-3, \dots$ şeklindeki tüm fonksiyonların türevi $2x$ olur.

O halde $x^2 + c$ (c sabit sayı) formundaki tüm fonksiyonların türevi $2x$ olduğundan, $2x$ fonksiyonunun integrali $x^2 + c$ olmalıdır.



$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
 $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

şeklinde tanımlı ve türevlenebilir iki fonksiyon olsun.

$c \rightarrow$ integral sabiti

$\int \rightarrow$ integral işareti

olmak üzere,

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

$$\int f'(x) dx = \int d(f(x)) = F(x) + c$$

eşitliğinde

$F(x) : f(x)$ fonksiyonunun ilk hali (ilkeli) dir.

$F(x) + c : f(x)$ fonksiyonunun belirsiz integralidir.

ÖRNEK - 1

$$\int 4 dx$$

integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

x değişkenine göre türevi 4 olan fonksiyon $4x + c$ dir.

O halde; $\int 4 dx = 4x + c$ olur.

ÖRNEK - 2

$$\int (4x - 2) dx$$

integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

x değişkenine göre türevi $4x - 2$ olan fonksiyon $2x^2 - 2x + c$ dir.

O halde; $\int (4x - 2) dx = 2x^2 - 2x + c$ olur.

ÖRNEK - 3

$$\int 3x^2 dx$$

integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

x değişkenine göre türevi $3x^2$ olan fonksiyon $x^3 + c$ dir.

O halde; $\int 3x^2 dx = x^3 + c$ olur.



BELİRSİZ İNTEGRAL ÖZELLİKLERİ



Diferansiyel ile integral art arda geldiğinde işlem sırasına dikkat edilmelidir.

Bir fonksiyonun önce integrali sonra diferansiyeli veya türevi alındığında c integral sabiti yazılmaz.

$$\rightarrow d\left(\int f(x) dx\right) = f(x) dx$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx}\left(\int f(x) dx\right) = f(x)$$

Önce diferansiyeli sonra integrali alındığında c integral sabiti yazılır.

$$\rightarrow \int d(f(x)) = f(x) + c$$

ÖRNEK - 1

$$d \int (x^3 + 2x) dx$$

ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

Şimdi önce integral sonrada bulunan ifadenin diferansiyelini almamızı istiyor.

En son yapılan işlem diferansiyel alma işlemi olduğunda c integral sabiti yazılmaz.

$$d \int (x^3 + 2x) dx = (x^3 + 2x) dx \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 2

$$\int d(x^2 + 5x)$$

ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

Önce diferansiyelini alıp sonra integralini almamız gerektiği için c integral sabiti yazılır.

$$\int d(x^2 + 5x) = \int (2x + 5) dx = x^2 + 5x + c \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 3

$$\frac{d}{dx} \int (3x + 1) dx$$

ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

Önce integralini bulup, sonra da x değişkenine göre türevini alacağımızdan integral sabiti yazılmaz.

$$\frac{d}{dx} \int (3x + 1) dx = 3x + 1 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 4

$$f(x) = \frac{d}{dx} \int (x^3 + \sqrt{x}) dx$$

olduğuna göre, f(4) kaçtır?

ÇÖZÜM

$$f(x) = \frac{d}{dx} \int (x^3 + \sqrt{x}) dx$$

$$f(x) = x^3 + \sqrt{x} \text{ bulunur.}$$

O halde, $f(4) = 4^3 + \sqrt{4} = 66$ olur.



ÖRNEK - 5

$f(x) = \frac{d}{dx} \int (2x^3 - x) dx$
olduğuna göre, $f'(2)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$f(x) = \frac{d}{dx} \int (2x^3 - x) dx$
 $f(x) = 2x^3 - x$ bulunur.
O halde; $f'(x) = 6x^2 - 1$ dir.
 $f'(2) = 23$ olur.

ÖRNEK - 6

$f(x) = \int d(4x + 1)$ ve $f(1) = 3$
olduğuna göre, $f(2)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$f(x) = \int d(4x + 1)$
 $f(x) = 4x + 1 + c$
(En son işlem integral alma olduğundan integral sabiti yazılır.)
(İşlem sırasını unutma.)
 $f(1) = 3 \Rightarrow 4 + 1 + c = 3 \Rightarrow c = -2$ bulunur.
O halde; $f(x) = 4x - 1$ olur.
 $f(2) = 7$ bulunur.

! $\frac{d}{dt} \left(\int f(x) dx \right) = 0$ dır.

Neden mi ?

Çünkü : $\int f(x) dx$ integrali x değişkenine bağlı bir fonksiyondur.

Bu integralin sonucu t değişkeni içermediğinden, t değişkeni için sabit fonksiyondur. t değişkenine göre türevi alındığında sabit fonksiyonun türevi de sıfırdır.

ÖRNEK - 7

$\frac{d}{dt} \left(\int x^2 dx \right)$
ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\int x^2 dx = g(x)$ olsun.

$g(x)$ fonksiyonunda t değişkeni bulunmaz ve sabit fonksiyondur.

Yani; $\frac{d}{dt} \left(\int x^2 dx \right) = \frac{d}{dt} (g(x))$

demek; t değişkenine göre $g(x)$ fonksiyonunun türevi demektir.

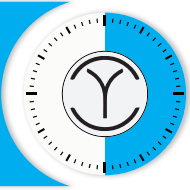
O halde; $\frac{d}{dt} (g(x)) = 0$ olur.

$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

- !** • $\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx$ dir.
- $\int f(x) dx + \int g(x) dx = \int (f(x) + g(x)) dx$
- $\int f(x) dx - \int g(x) dx = \int (f(x) - g(x)) dx$

ÖRNEK - 8

- I. $\int 2x dx = 2 \int x dx$
 - II. $\int 7x^3 dx = 7 \int x^3 dx$
 - III. $\int (4x^2 - 2) dx = 4 \int x^2 dx - 2 \int dx$
- şeklinde yazılabilirler.



ÖRNEK - 9

$f(x) = \frac{d}{dx} \left(\int x^2 dx + \int 3x dx \right)$
olduğuna göre, $f'(1)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$$f(x) = \frac{d}{dx} \int (x^2 + 3x) dx$$

$$f(x) = x^2 + 3x \text{ olur.}$$

$$\text{O halde; } f'(x) = 2x + 3$$

$$f'(1) = 5 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 10

$\int f(x) dx + \int x \cdot f'(x) dx$
ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$= \int (f(x) + x \cdot f'(x)) dx$$

$$= \int (f(x) \cdot x)' dx$$

$$= \int d(x \cdot f(x)) = x \cdot f(x) + c \text{ olur.}$$

Hatırlatma

$$(x \cdot f(x))' = f(x) + x \cdot f'(x)$$

$$d(f(x)) = f'(x) dx$$



Bir fonksiyonun **integralinin** eşiti biliniyorsa her iki tarafın türevi alınarak çözüm yapılabilir.

$$\bullet \int f(x) dx = F(x) + c \text{ ise}$$

$$\frac{d}{dx} \int f(x) dx = \frac{d}{dx} (F(x) + c)$$

$$f(x) = F'(x) \text{ olur.}$$

(Yani; F fonksiyonunun **ters türevi** f fonksiyonudur.)

ÖRNEK - 11

$\int (x^2 + f(x)) dx = x^3 + x + c$
olduğuna göre, $f(2)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

İntegralimizin eşitini biliyoruz. O halde her iki tarafın türevi alalım.

$$\frac{d}{dx} \int (x^2 + f(x)) dx = \frac{d}{dx} (x^3 + x + c)$$

$$x^2 + f(x) = 3x^2 + 1$$

$$f(x) = 2x^2 + 1$$

$$f(2) = 9 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 12

$f(x) = -x + \int \sqrt{x+m} dx$
fonksiyonunun $x = 2$ apsisli noktada yerel ekstremumu olduğuna göre, m kaçtır?

ÇÖZÜM

- $x = 2$ apsisli noktada f fonksiyonunun yerel ekstremumu varsa $f'(2) = 0$ dır.

$$\bullet f(x) + x = \int \sqrt{x+m} dx$$

$$\frac{d}{dx} (f(x) + x) = \frac{d}{dx} \int \sqrt{x+m} dx$$

$$f'(x) + 1 = \sqrt{x+m}$$

$$f'(x) = -1 + \sqrt{x+m} \text{ olur.}$$

- O halde; $f'(2) = 0$ olduğundan;

$$-1 + \sqrt{2+m} = 0$$

$$m = -1 \text{ bulunur.}$$



ÖRNEK - 13

$f(x) = \int (x\sqrt{x} + 1) dx$
olduğuna göre, $f''(1)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

Her iki tarafın türevini alalım
 $f'(x) = x\sqrt{x} + 1$, tekrar türev alalım.
 $f''(x) = (x^{\frac{3}{2}} + 1)' = \frac{3}{2} \sqrt{x}$
 Buradan $f''(1) = \frac{3}{2}$ bulunur.

ÖRNEK - 14

$P(x)$ ve $Q(x)$ birer polinomdur.

$$\bullet \int d(x) + \int d(x^2) + \dots + \int d(x^n) = \int P(x) dx$$

$$\bullet \int d(2x) + \int d(x^2+x) + \dots + \int d(x^n+x) = \int Q(x) dx$$

$R(x) = P(x) + Q(x)$ olmak üzere, $R(x)$ polinomunun katsayıları toplamı 120 olduğuna göre, n kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\bullet \int (1 + 2x + 3x^2 + \dots + n \cdot x^{n-1}) dx = \int P(x) dx$$

olduğundan $P(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + n \cdot x^{n-1}$ olur.

$$\bullet \int 2 dx + \int (2x + 1) dx + \dots + \int (n \cdot x^{n-1} + 1) dx = \int Q(x) dx$$

$$\bullet \int \left((1 + 2x + 3x^2 + \dots + n \cdot x^{n-1}) + \underbrace{1 + \dots + 1}_{n \text{ tane}} \right) dx = \int Q(x) dx$$

olduğundan $Q(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + n \cdot x^{n-1} + \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ tane}}$ olur.

$$R(x) = P(x) + Q(x) = 2 \cdot (1 + 2x + 3x^2 + \dots + n \cdot x^{n-1}) + n$$

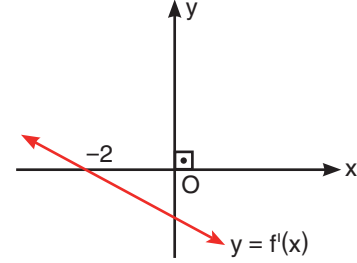
$$\text{Buradan } R(1) = 2 \cdot (1 + 2 + \dots + n) + n = 120$$

$$= 2 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n = 120$$

$$n \cdot (n+2) = 120$$

$$n = 10 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK - 15



Yukarıda f' fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$$\int (mx + m - 6) dx = f(x) + c$$

eşitliği sağlanıyor.

f fonksiyonu $A(1, 16)$ noktasından geçtiğine göre, $f(-1)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

Grafikten $f'(-2) = 0$ bulunur. Her iki tarafın türevini alırsak

$$\frac{d}{dx} \int (mx + m - 6) dx = \frac{d}{dx} (f(x) + c)$$

$$mx + m - 6 = f'(x) \text{ olur.}$$

$$f'(-2) = 0 \text{ olduğundan;}$$

$$-2m + m - 6 = 0$$

$$m = -6 \text{ bulunur.}$$

$$f'(x) = -6x - 12 \text{ olur.}$$

$$f(x) = -3x^2 - 12x + c \text{ şeklindedir.}$$

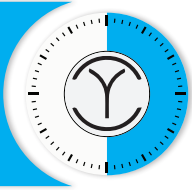
f fonksiyonu $A(1, 16)$ noktasından geçtiğine göre;

$$f(1) = 16 \text{ olur.}$$

$$16 = -3 - 12 + c \Rightarrow c = 31 \text{ olur.}$$

$$\text{O halde, } f(x) = -3x^2 - 12x + 31 \text{ dir.}$$

$$f(-1) = -3 + 12 + 31 = 40 \text{ olur.}$$



ÖRNEK - 16

- $\int (f(x) - 2g(x)) dx = x^2 - 6x + c_1$
- $\int (f(x) + g(x)) dx = x^2 + c_2$

olduğuna göre, $f(1)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

İki eşitlikte de her iki tarafın türevlerini alalım.

$$f(x) - 2g(x) = 2x - 6$$

$$f(x) + g(x) = 2x$$

Bu eşitliklerden $f(x) = 2x - 2$ olarak hesaplanır. Buradan $f(1) = 0$ olur.

ÖRNEK - 17

Gerçek sayılar kümesi üzerinde türevlenebilen f fonksiyonu

$$\int x \cdot f(x) dx = x^2 \cdot f(x) + c$$

eşitliği sağlanmaktadır.

Buna göre, $f'(2) = k \cdot f(2)$ ise k değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

Her iki tarafın türevini alırsak

$$x \cdot f(x) = 2x \cdot f(x) + x^2 \cdot f'(x)$$

$$-x \cdot f(x) = x^2 \cdot f'(x)$$

$$x = 2 \text{ için, } -2 \cdot f(2) = 4 \cdot f'(2)$$

$$f'(2) = \frac{-1}{2} \cdot f(2)$$

$$k = \frac{-1}{2} \text{ olarak bulunur.}$$



Bir fonksiyonun **türevinin** eşiti biliniyorsa her iki tarafın integrali alınarak çözüm yapılabilir.

$$f'(x) = g(x)$$

$$\int f'(x) dx = \int g(x) dx$$

$$\int d(f(x)) = \int g(x) dx$$

$$\int g(x) dx = c + f(x)$$

şeklinde.

ÖRNEK - 18

Tüm katsayıları n tamsayısına eşit olan $(n + 1)$ terimli polinom fonksiyonuna "n-sel fonksiyon" denir.

Örneğin;

$$Q(x) = 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x^1 + 2 \text{ dir.}$$

4. dereceden 2-sel bir fonksiyondur.

$$\int P(x) dx = Q(x) + c$$

ifadesinde $Q(x)$ 10. dereceden 9 terimli 1-sel fonksiyon ve $P(1) = 47$ olduğuna göre, $P(-1)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\int P(x) dx = \underbrace{x^{10} + x^9 + \dots + x^1 + c}_{1 \text{ terim eksik olmalı}}$$

$$P(x) = \underbrace{10 \cdot x^9 + 9 \cdot x^8 + \dots + 2x + 1}_{\text{terimlerinden biri fazladan yazıldı.}}$$

$$P(1) = 10 + 9 + \dots + 1$$

$$P(1) = 55 \text{ olurdu.}$$

$$P(1) = 47 \text{ olduğuna göre}$$

$P(x)$ polinomunda $8 \cdot x^7$ 'li terim yoktur. O halde

$$P(x) = 10 \cdot x^9 + 9 \cdot x^8 + 7 \cdot x^6 + \dots + 2 \cdot x + 1 \text{ olur.}$$

$$P(-1) = 3 \text{ tür.}$$

**SORU-1**

f gerçel sayılar kümesi üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon

$$\int x \cdot f(x) \, dx = x^3 + 2x^2 + c$$

eşitliği veriliyor.

Buna göre, $f'(x)$ ifadesinin eşitini bulunuz.

SORU-2

$$F(x) = \int x^2 \cdot f'(x) \, dx + 2 \int x \cdot f(x) \, dx$$

eşitliği veriliyor.

$$F(0) = 1, f(1) = 3$$

olduğuna göre, $F(1)$ değeri kaçtır?

SORU-3

m ve n birer gerçel sayı

$$\int x \cdot \sqrt{x} \, dx = (m + 1) \cdot x^n + c$$

Buna göre $m \cdot n$ çarpımı kaçtır?

SORU-4

Pozitif gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonu için

$$\int \frac{f(x)}{x} dx = x \cdot f(x) + c$$

eşitliği veriliyor.

$f(2) = 1$ olduğuna göre $f'(2)$ değeri kaçtır?

SORU-5

P polinom fonksiyon olmak üzere

$$\int P(x) \, dx + \int P(x + 1) \, dx = 8x + c$$

eşitliği veriliyor.

Buna göre, $d(x \cdot P(x))$ ifadesinin eşitini bulunuz.

SORU-6

Gerçek sayılar kümesinde türevlenebilen f çift fonksiyonu için

$$\int (f(-x) + g(x)) \, dx = 2x^2 + \int f(x) \, dx$$

Buna göre, $g(1) + g'(1)$ toplamı kaçtır?

SORU-7

f ve g gerçel sayılar kümesi üzerinde türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$\int (2f'(x) - g(x)) \, dx = 2x + \int g(x) \, dx$$

eşitliği veriliyor.

Buna göre;

- I. $f(x) = g(x)$
- II. $f'(x) = g'(x)$
- III. f ve g sabit fonksiyonlardır.

ifadelerinden hangileri kesinlikle doğrudur?

SORU-8

$$f(x) - \int \frac{d(x)}{x+1} = \int \frac{x^2}{x^2+1} dx$$

olduğuna göre, $f'(1)$ değeri kaçtır?

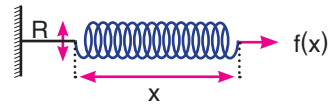
SORU-9

Gerçek sayılar kümesi üzerinde türevlenebilen ve sabit olmayan f fonksiyonu için

$$\int f^2(x) \, d(f(x)) = k \cdot f^3(x) + c$$

eşitliği veriliyor.

Buna göre, k değeri kaçtır?

SORU-10

R br çaplı, x br uzunluğundaki silindirik yay için;

- $x = \frac{f(x) - R}{2}$

- $\int x d(f(x)) + \int f(x) dx = 2x^2$

eşitlikleri verilmiştir.

Buna göre,

x = 1 br iken R = $\frac{1}{2}$ br dir.

$x = 2$ br iken **R kaç birim olur?**

Cevap Anahtarı				
1. 3	2. 4	3. $\frac{-3}{2}$	4. $\frac{-1}{4}$	5. $4dx$
6. 8	7. Yalnız II	8. 1	9. $\frac{1}{3}$	10. $\frac{1}{4}$



1. $f(x) = x^3 + 2x$
fonksiyonunun diferansiyeli aşağıdakilerden hangisidir?
- A) $(x^3 + 2x)dx$ B) $3x^2 + 2$ C) $(3x^2 + 2)dx$
D) $\frac{x^4}{4} + x^2$ E) $(x^3 + 2)dx$

2. $d(x^2 + 3x - 7) = (2x + a) dx$
olduğuna göre, a kaçtır?
- A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) -7

3. $\frac{d[(a+1) \cdot x^3]}{d(x^2 + 1)} = 6x$
olduğuna göre, a kaçtır?
- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

4. $d(f(x)) = (x^3 - 7x) dx$
olduğuna göre, $f'(1)$ kaçtır?
- A) 4 B) -1 C) 0 D) -2 E) -6

5. $d(x^3) = d(3x + 5)$
eşitliğini sağlayan x değerlerinin çarpımı kaçtır?
- A) 2 B) 1 C) 0 D) -1 E) -2

6. $\int (5x - 1) dx$
ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?
- A) $(5x - 1)dx$ B) $(5x + 1) + c$ C) $(5x - 1)dx + c$
D) $\frac{5x^2}{2} - x$ E) $\frac{5x^2}{2} - x + c$

7. $\frac{d}{dx} \int (3x^2 - x) dx$
ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?
- A) $(x^3 - x)$ B) $3x^2 - x$ C) $(3x^2 - x)dx$
D) $3x^2 - x + c$ E) $x^3 - \frac{x^2}{2} + c$

8. $\int d(x^2 + \sqrt{x})$
ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?
- A) $2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} + c$ B) $(x^2 + x)dx + c$ C) $(x^2 + x)dx$
D) $x^2 + x$ E) $x^2 + \sqrt{x} + c$



9. $\int d(f(x)) = x^2 + 4x - 1$
 $f(0) = 2$
olduğuna göre, $f(1)$ kaçtır?
A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

10. $\frac{d}{dx} \int x^2 d(3x + 1)$
ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?
A) $x^2 + 3$ B) $x^2 + 3x$ C) $3x^2$ D) $3x^3$ E) $3x^3 + x$

11. $f(x) = \int d(x^4 - x - 1)$
olduğuna göre, $f(1) - f(-2)$ kaçtır?
A) -18 B) -15 C) -12 D) -9 E) -6

12. Bir imalathanedeki ürünün üretim hızı
 $\frac{df}{dt} = (6t + 8)$ ton/gün
olarak belirlenmiştir.
 $f(t)$: "t. gündeki üretilen ürünün ton cinsinden miktarıdır."
Üretime başlamadan önce imalathanede 5 ton ürün bulunduğuna göre, 4. gün kaç ton ürün üretilmiştir?
A) 72 B) 76 C) 80 D) 85 E) 92

13. $\int d(f'(x)) = ax^3 + 3x^2 + 1$
eşitliği veriliyor.
 $f''(1) = 0$ olduğuna göre, a kaçtır?
A) -3 B) -2 C) -1 D) 0 E) 1

14. $\int \frac{3}{x} d(x^2 + 4)$
ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?
A) $x^2 + c$ B) 1 C) 2 D) $6x$ E) $6x + c$

15. $\int \frac{f(x)}{x} dx = 3x^2 - 4x + c$
olduğuna göre, $f(2)$ kaçtır?
A) 24 B) 20 C) 16 D) 12 E) 9

16. $\int (x + x \cdot f(x)) dx = x^2 \cdot f(x) + c$
olmak üzere,
 $f(1) = 2$ olduğuna göre, $f'(1)$ değeri kaçtır?
A) -4 B) -3 C) -2 D) -1 E) 0

Cevap Anahtarı

1.C	2.C	3.B	4.E	5.D	6.A
7.B	8.E	9.D	10.C	11.A	12.D
13.B	14.E	15.C	16.D		



1. $f(x) = \int d(x^3 + 4)$ ve $f(1) = 5$

olduğuna göre, $f(2)$ değeri kaçtır?

- A) 7 B) 9 C) 11 D) 12 E) 15

2. Her x ve y gerçel sayıları için " $f(0) \neq 0$ " olmak üzere
 $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$
 eşitliği sağlanmaktadır.

Buna göre, $\int f(x) \cdot f(-x) dx$ integralinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $-x$ B) $-x + c$ C) x D) c E) $x + c$

3. $f(x) = \frac{d^2}{dx^2} \int (x^3 - 12x) dx$

fonksiyonunun yerel ekstremum noktasının apsiler toplamı kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

4. $\int \frac{d^2 f(x)}{dx^2} dx = 4x + c$

$f'(1) = 2$ ve $f(1) = 0$

olduğuna göre, $f(2)$ kaçtır?

- A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

5. $f(x) = \frac{d}{dx} \int (x^3 + 2x - 5) dx$

olduğuna göre, $f'(1)$ kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

6. f ve g gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonlardır.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{10} n \cdot x^n \quad g(x) = \int \frac{f(x)}{x} dx$$

$g(1) = 11$ olduğuna göre, $g(-1)$ değeri kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

7. f ve g fonksiyonları gerçel sayılar kümesi üzerinde türevli fonksiyonlardır.

Buna göre,

I. $d(f + 2g) = df + 2dg$

II. $d(f \cdot g) = (df) \cdot (dg)$

III. $d(f^3) = 3f^2 d(f)$

IV. $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df}{dg}$

ifadelerinden kaç tanesi daima doğrudur?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

8. P polinom fonksiyon olmak üzere;

$$\int (P(x) + P'(x + 1)) dx = x^3 + 2x + c$$

olduğuna göre, $P(0) + P(1)$ toplamı kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 6 E) 7



9. $\int \frac{f(x)}{x^2} dx - \int \frac{f'(x)}{x} dx = x^2 + c$ ve $f(1) = 2$

olduğuna göre, $f(2)$ kaçtır?

- A) 2 B) 0 C) -1 D) -2 E) -3

10. f ve g fonksiyonları için;

- $\int f(x) dx = f(x) + c$
- $\int (f \cdot g)(x) dx = (5x - 2) \cdot f(x) + c$

olduğuna göre,

$$g(a) + g'(a) = 3$$

koşulunu sağlayan a gerçel sayısı kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 2 E) 3

11. Gerçel sayılar kümesi üzerinde türevlenebilen f fonksiyonu orijine göre simetrik.

$$g(x) = \int (f(x) + x) dx + \int (f(-x) + x) dx$$

eşitliği veriliyor.

$g(1) = 2$ olduğuna göre, $g(3)$ değeri kaçtır?

- A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

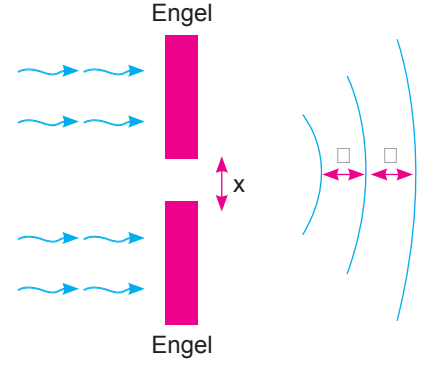
12. $\int \sqrt{x} dx = \int d(x \cdot f(x))$

eşitliği veriliyor.

f fonksiyonu üzerindeki $A(1, 4)$ noktasından f fonksiyonuna çizilen teğetin eğimi kaçtır?

- A) -3 B) -1 C) $-\frac{1}{3}$ D) 1 E) 3

13.



Şekildeki düzenekte su dalgaları engeller arasındaki açıklıktan geçerek dalgalar arası mesafe λ olacak şekilde kırınımına uğruyor.

Engeller arası mesafe x br iken $\lambda = f(x)$ br dir.

$$\int \frac{x^2 + f'(x)}{2} dx = \frac{2x^3}{3} - x^2 + c$$

olmak üzere, $x = 1$ br iken $\lambda = 2$ br olduğuna göre, $x = 2$ br iken λ kaç birimdir?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

14. f türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere, her x gerçel sayısı için $f(x) + 2f'(x) = 0$ eşitliği sağlanıyor.

Buna göre,

$$\int (2 - x) \cdot f(x) dx$$

integralinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $2x \cdot f(x) + c$ B) $x \cdot f(x) + c$ C) $\frac{f(x)}{x} + c$
D) $x^2 \cdot f(x) + c$ E) $-\frac{f(x)}{x^2} + c$

Cevap Anahtarı

1.D	2.E	3.A	4.C	5.E	6.A
7.C	8.A	9.D	10.B	11.E	12.A
13.B	14.A				



İNTEGRAL ALMA KURALLARI



a bir gerçel sayı olmak üzere,

$$\int a \, dx = a \cdot x + c$$



$n \neq -1$ ve n bir gerçel sayı olmak üzere,

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$



$n \neq 1$ ve n bir gerçel sayı olmak üzere,

$$\int \frac{dx}{x^n} = \int x^{-n} \, dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + c$$



$n \geq 2$ ve n bir tamsayı olmak üzere,

$$\int \frac{1}{\sqrt[n]{x}} \, dx = \int x^{\frac{1}{n}} \, dx = \frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} + c$$

ÖRNEK - 1

$$\int 5 \, dx$$

integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\int 5 \, dx = 5 \cdot x + c \text{ olur.}$$

ÖRNEK - 2

$$\int x^2 \, dx$$

integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} \int x^2 \, dx &= \frac{x^{2+1}}{2+1} + c \\ &= \frac{x^3}{3} + c \text{ olur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK - 3

$$\int (2x + \sqrt{x}) \, dx$$

integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} \int (2x + \sqrt{x}) \, dx &= \int (2x + x^{\frac{1}{2}}) \, dx \\ &= x^2 + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c \\ &= x^2 + \frac{2}{3} x\sqrt{x} + c \text{ bulunur.} \end{aligned}$$



İNTEGRAL

ÖRNEK - 4

$\int x d(2x + 1)$
integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}\int x d(2x + 1) &= \int 2x dx \\ &= 2 \cdot \frac{x^2}{2} + c \\ &= x^2 + c \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

ÖRNEK - 5

$\int \frac{x^4 + x + 1}{x^3} dx$
integralinin eşitini bulunuz.

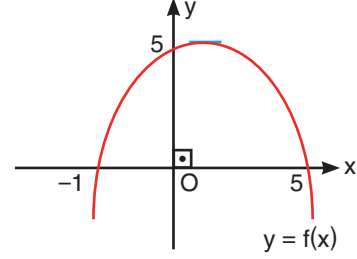
ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4 + x + 1}{x^3} dx &= \int (x + x^{-2} + x^{-3}) dx \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{-2}}{-2} + c \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + c \text{ bulunur.}\end{aligned}$$



İntegral içindeki rasyonel ifadelerde pay paydaya bölünerek ifade düzenlenir.

ÖRNEK - 6



Analitik düzlemde ikinci dereceden f polinom fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre,

$\int f(x) dx$
integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

Öncelikle f fonksiyonunun denklemini yazalım.

$$\begin{aligned}f(x) &= a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \\ &= a \cdot (x + 1) \cdot (x - 5)\end{aligned}$$

$f(0) = 5$ olduğuna göre,

$$5 = a \cdot (-5) \Rightarrow a = -1 \text{ olur.}$$

$$f(x) = -(x + 1) \cdot (x - 5) = -x^2 + 4x + 5 \text{ bulunur.}$$

O halde;

$$\begin{aligned}\int f(x) dx &= \int (-x^2 + 4x + 5) dx \\ &= -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5x + c \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

ÖRNEK - 7

$\int (x + 1) \cdot (2x - 1) dx$
integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

Önce ifadeyi düzenleyelim:

$$\begin{aligned}\int (x + 1) \cdot (2x - 1) dx &= \int (2x^2 + x - 1) dx \\ &= 2 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + c \text{ bulunur.}\end{aligned}$$