LİMİT VE SÜREKLİLİK

DETAYLI **KONU** ANLATIMI
youtube.com/
Orijinal Matematik

ÇÖZÜMLÜ **ÖRNEK** SORULAR

BİR DE **ORİJİNALDEN** DİNLE!
youtube.com/
Orijinal Matematik

KAZANIM TESTLERİ
Google play
App Store

ÖSYM TARZI TESTLER
Google play
App Store

ÖSYM TARZI KARMA TESTLER
Google play
App Store

ORİJİNAL MATEMATİK
YAYINLARI

KONU ANLATIMLI EĞİTİM SETİ

www.orijinalyayinlari.com

ORİJİNAL MATEMATİK VİDEO ÇÖZÜM
UYGULAMASINI İNDİR

Google play
App Store

VİDEOLAR CEBİNE GELSİN

@orijinalmatematik

youtube.com/ Orijinal Matematik
Video Çözümler: İHSAN OYMAK

AYT
ORİJİNAL LİMİT VE SÜREKLİLİK FASİKÜLÜ

ISBN

978-605-06571-4-2

Genel Yayın Koordinatörü

Zafer BALCI

Yazarlar

Barış ALTAY
Hasan BOSTANLIK
Durmuş ÖĞMEN
Zafer BALCI

Editörler

Esin SALKIM
Murat ÇEVİK
Fatih DAYI
Serkan TAŞÇI

Redaksiyon

Cansu SARI BURNAZOĞLU

Dizgi

S. Tuğrul ATASOY
statasoy@gmail.com

BASKI VE CİLT

Özyurt Matbaacılık

2022

1. BASKI

ORİJİNAL MATEMATİK
YAYINLARI

İLETİŞİM

Ostim Mahallesi 1207. Sokak 3/C-D Ostim/Yenimahalle/ANKARA

Tel: (0312) 395 13 96   Fax: (0312) 394 10 04

ÖN SÖZ

Sevgili Öğrenciler ve Değerli Meslektaşlarımız,

Orijinal Matematik Yayınları olarak idealleri olan her öğrencimize yol göstermek ve onların başarılarını artırmak için "Limit ve Süreklilik Konu Anlatımlı Eğitim Seti" adını verdiğimiz fasikülümüzü hazırladık.

Fasikülümüzde detaylı konu anlatımları, çözümlü örnekler, "Bir de Orijinalden Dinle!" adlı açık uçlu sorular ve kazanım testleri bulunmaktadır. Bölüm sonunda bir Orijinal Yayınları klasiği olan "ÖSYM Tarzı Testler" yer almaktadır.

Konu anlatımlarımız ve "Bir de Orijinalden Dinle!" açık uçlu sorularımız, Orijinal Matematik Youtube kanalında özel ders formatında izleyebilmeniz için hazırlanmıştır. Kazanım Testleri ve ÖSYM Tarzı Testlerimizin çözümlerini Orijinal Matematik video çözüm uygulamasından dinleyebilirsiniz. Çalışmamızın tamamı video çözümlüdür.

Tuğba BOSTANLIK, Mehtap ALTAY, Şimal ALTAY,
Özge BALCI, Mustafa KOÇ, Fatih ÖZKAN,
Recep Hakan DÖNMEZ, Esin SALKIM, Mevlüt GÜVEN,
Mehmet GÜLTEKİN, Fuat SES, Mesut KARABULUT,
Arif ÖĞREDEN, Yasin EREN ve Serkan ÖZKAL'a
bu çalışmamızda bize verdikleri desteklerden dolayı
teşekkür ederiz:

Her yer orijinal olacak.

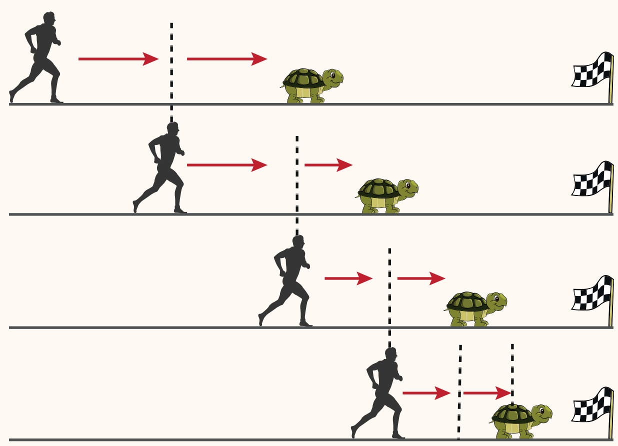
ORİJİNAL AİLESİ

1. BÖLÜM

2. BÖLÜM

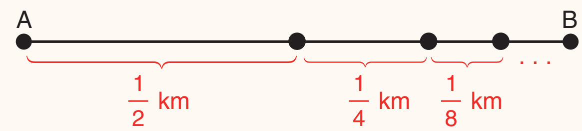
3. BÖLÜM

ZENON PARADOKSU



Yunan savaş kahramanı Akhilleus, bir kaplumbağa ile yarış yapacaktır. Çok iyi bir koşucu olduğunu düşünen Akhilleus; kaplumbağanın belirli bir mesafe, örneğin yüz metre, ileriden başlamasına izin verir. Eğer her ikisinin de sabit hızlarda koştuğunu düşünürsek (biri sabit yüksek bir hızda, diğer sabit düşük bir hızda) belirli bir süre sonra Akhilleus yüz metre koştuğunda, kaplumbağanın başladığı yere gelmiş olacaktır; bu süre boyunca kaplumbağa küçük de olsa belirli bir mesafe koşmuştur, örneğin 1 metre. Akhilleus bir süre sonra bu mesafeyi de tamamladığında, o süre zarfında kaplumbağa yine küçük de olsa bir mesafe ilerlemiş olacaktır ve bu böyle devam edecektir. Böylece, Akhilleus ne zaman kaplumbağanın varmış olduğu bir noktaya varsa, hâlâ gitmesi gereken bir mesafe kalmış olacaktır. Bu nedenle Zenon, Akhilleus'un kaplumbağayı hiçbir zaman geçemeyeceğini söylemiştir. Amacı mantıksal düşünme bakımından hareketin imkansızlığını göstermektir.

Bu hikaye garip olsa da Zenon'un şu bakışını inceleyelim.



|AB| = 1 km olsun. Zenon, bir kişinin bir noktadan diğer noktayı gözlemlemesini istiyor. Bunun için önce yolun yarısını, sonra kalan yolun yarısını katedeceğini ve bu işlemin bu şekilde devam edeceğini; sonuç olarak sonsuz bölünmeden dolayı bir kişinin diğer noktaya hiçbir şekilde ulaşamayacağını ancak çok ama çok yaklaşabileceğinizi söylüyor.

Limite başlıyoruz, Zenon'un amacı fonksiyonel bir tanım (kural) ile bu kişinin B noktasını gözlemlemesi.

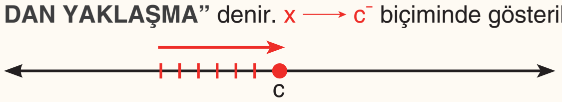
Bu olayı matematiksel olarak şöyle ifade ederiz:

$$|AB| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

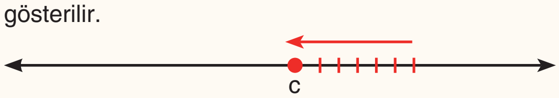
"n" sayısı arttıkça toplamın 1 sayısına yaklaştığını görürüz!

NOKTA YAKLAŞIMI

a) x değişkeni; bir c gerçel sayısına, c'den küçük sayılardan artan değerler vererek yaklaşıyorsa bu yaklaşıma "**SOLDAN YAKLAŞMA**" denir. $x \longrightarrow c^-$ biçiminde gösterilir.



b) x değişkeni; bir c gerçel sayısına, c'den büyük sayılardan azalan değerler vererek yaklaşıyorsa bu yaklaşıma "**SAĞDAN YAKLAŞMA**" denir ve $x \longrightarrow c^+$ biçiminde gösterilir.

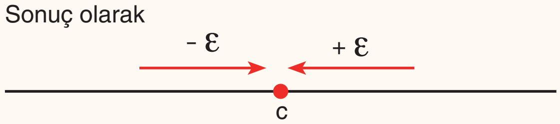


ε (Epsilon)

$\varepsilon > 0$ olmak üzere,

$$c + \varepsilon \longrightarrow c^+$$
$$c - \varepsilon \longrightarrow c^-$$

Sonuç olarak



Örnek: $x \longrightarrow 2^+$ (2,00 . . . .1)
$x \longrightarrow 2^-$ (1,99 . . . .9)

şeklinde düşünmemizi sağlar.

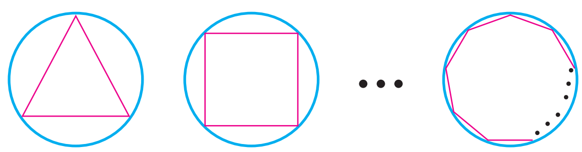
ÖRNEK - 1

Yarıçapı sabit bir çemberin içine önce eşkenar üçgen, sonra kare, daha sonra düzgün beşgen çizin.

Bu çizimlerinize düzgün çokgenin kenar sayılarını artırarak devam edin.

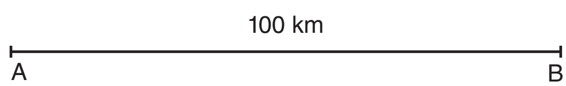
Fark ettiniz mi?

Çokgenlerin kenar sayısı arttırıldığında (Örneğin 100, 150, ...) çembere yakınsıyor. Bu durumda çember sonsuz kenarlı mıdır, yoksa kenarsız mıdır?



(Hala limit demedik)

ÖRNEK - 2



Sabit hızla, dolu bir depo ile yola çıkan ve yol boyunca sabit litre benzin tüketen aracın A şehrinden yola çıkıp B şehrine vardığında deposunun tamamen boşaldığını düşünelim.

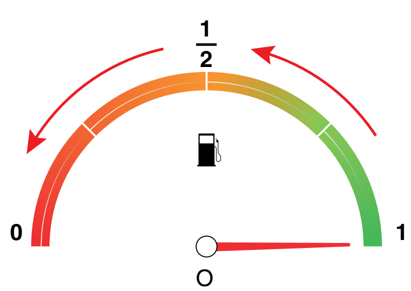
x : Depoda kalan benzin miktarı (litre)

y : B şehrine kalan mesafe (km)

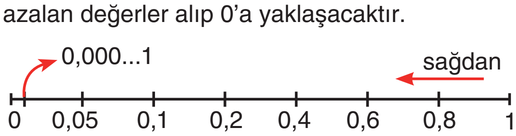
z : Aracın aldığı yol (km)

olmak üzere; x, y ve z değerlerini inceleyelim.

i) x : Depoda kalan benzin miktarı (litre) olmak üzere,

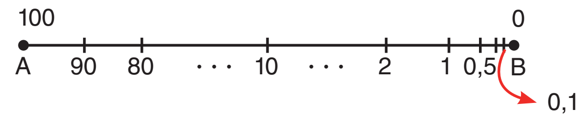


Deposu tam dolu olan bir aracın benzin gösterge ibresi 1'de iken araç yol aldıkça ibre 1'den başlayarak azalan değerler alıp 0'a yaklaşacaktır.



$x \longrightarrow 0^+$ (x sıfıra sağdan yaklaşmaktadır.)

ii) y : B şehrine kalan mesafe (km) olmak üzere,



A ile B şehri arasındaki mesafe 100 km olsun.

A noktasından harekete başlayan bir araç, B şehrine doğru yol aldıkça aradaki mesafe azalarak sıfıra yaklaşmaktadır.

Yani sıfır sayısına sağdan yaklaşmaktadır.

$y \longrightarrow 0^+$ (sıfıra sağdan yaklaşmaktadır.)

iii) z : Aracın aldığı yol (km) olmak üzere,

Depoda kalan benzin miktarı ile alınan yolu gözlemleyecek olursak benzin göstergesi 0'a sağdan yaklaştığında alınan yol 100 km'ye soldan yaklaşacaktır.

Bu durumda ise

$z \longrightarrow 100^-$ (100'e soldan yaklaşmaktadır.)

ÖRNEK - 3

Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı

$f(x) = 2x + 1$ fonksiyonunu ele alalım.

Bu fonksiyonun x = 1 noktasına sağından ve solundan değerler verilerek yaklaşıldığında, f(x)'in sonuçlarını inceleyelim.

	sol →					← sağ		
x	0,9	0,95	0,96	0,99	1	1,001	1,1	1,2	1,3
f(x)	2,8	2,9	2,92	2,98	3	3,002	3,2	3,4	3,6

⚠ Tabloyu dikkatlice inceleyecek olursak x = 1 noktasına sağdan ve soldan ne kadar yakın değer seçilirse f(x) değeri 3'e o kadar yaklaşmaktadır.

⚠ Özetleyecek olursak x değişkenine 1'den küçük artan değerler verildiğinde f(x) değeri artarak soldan 3'e yaklaşmaktadır. 1'den büyük azalan değerler verildiğinde f(x) değeri azalarak sağdan 3'e yaklaşmaktadır.

$x \to 1^-$ $\qquad$ $x \to 1^+$

$f(x) \to 3^-$ $\qquad$ $f(x) \to 3^+$

ÖRNEK - 4

a ve b negatif olmayan gerçel sayılar olmak üzere,

$2a + b = 6$

eşitliği veriliyor.

Buna göre,

I. a sayısı artan değerler alarak 3'e yaklaşırsa b sayısı, azalarak 0'a yaklaşır.

II. b sayısı artan değerler alarak 4'e yaklaşırsa a sayısı, azalarak 1'e yaklaşır.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

ÇÖZÜM

I)

a	...	2,5	2,6	...	2,9	2,92	2,95	...	2,99	...	**3**
b	...	1	0,8	...	0,2	0,16	0,1	0,2	0,02	...	**0**

Tabloyu inceleyelim.

a sayısı artarak 3 sayısına soldan yaklaşırken $(a \to 3^-)$

b sayısı azalarak 0 sayısına sağdan yaklaşmaktadır. $(b \to 0^+)$

(I. Öncül Doğru)

II)

b	...	3,5	3,6	3,7	3,9	3,92	3,95	3,99	...	**4**
a	...	1,25	1,2	1,15	1,05	1,025	1,005	1,0025	...	**1**

b sayısı artarak 4 sayısına soldan yaklaşırken $(b \to 4^-)$

a sayısı azalarak 1 sayısına sağdan yaklaşmaktadır. $(a \to 1^+)$

(II. Öncül Doğru)

Cevap: I ve II

ÖRNEK - 5

x gerçel sayısı 1'e sağdan yaklaşırken

I. $(x + 1)$ ifadesi 2'ye soldan yaklaşır.

II. $(2 - x)$ ifadesi 1'e soldan yaklaşır.

III. $(5x - 3)$ ifadesi 2'ye soldan yaklaşır.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

ÇÖZÜM

I. x gerçel sayısının 1'e sağdan yaklaşması

$x \to 1^+ = 1,000.....1$ alırsak

$(x + 1) \to 1,000....1 + 1 = 2,000...1$ olur.

Yani 2'den çok çok az büyük bir değer olduğundan

$(x + 1)$ 2'ye sağdan yaklaşıyor denir ve

$(x + 1) \to 2^+$ ile ifade ederiz.

(I. Öncül Yanlış)

II. $x \to 1^+ = 1,000...1$ aldığımızda

$(2 - x) \to 2-(1,000...1) = 0,99...9$ olur.

Yani 1'den çok çok küçük bir değer olduğundan

$(2 - x)$ 1'e soldan yaklaşıyor denir ve

$(2 - x) \to 1^-$ ile ifade ederiz.

(II. Öncül Doğru)

III. $x \to 1^+ = 1,000...1$ aldığımızda

$5x \to 5^+ = 5,000...5$ elde edilir.

$(5x - 3) \to (5,000...5 = -3 = 2,000...5$ olur.

Yani 2'den çok çok az büyük bir değer olduğundan

$(5x - 3)$ 2'ye sağdan yaklaşıyor denir ve

$(5x - 3) \to 2^+$ ile ifade ederiz.

(III. Öncül Yanlış)

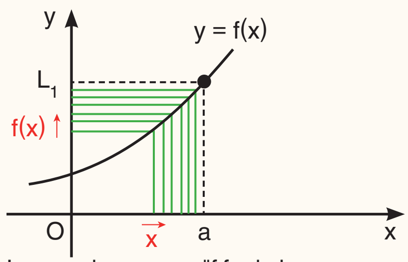
Cevap: Yalnız II

Orijinal Bilgi

$x \to a^+$ iken $-x \to (-a)^-$

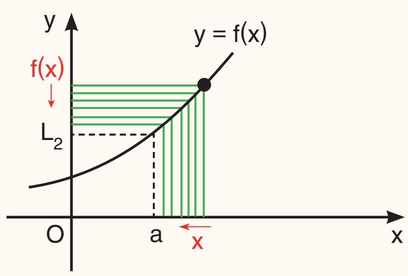
$x \to a^-$ iken $-x \to (-a)^+$

şeklinde düşünülebilir.



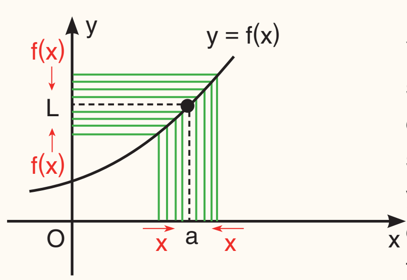
Yanda verilen f fonksiyonunun grafiği incelendiğinde x, a'ya soldan yaklaşırken f(x)'in L_1 gerçek sayısına yaklaştığı görülmektedir.

L_1 gerçek sayısına "f fonksiyonunun x = a apsisli noktasındaki **soldan limiti**" denir ve $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L_1$ biçiminde gösterilir.



Yanda verilen f fonksiyonunun grafiği incelendiğinde x, a'ya sağdan yaklaşırken f'in L_2 gerçek sayısına yaklaştığı görülmektedir.

L_2 gerçek sayısına "f fonksiyonunun x = a apsisli nokta soldaki **sağdan limiti**" denir ve $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L_2$ biçiminde gösterilir.



Yanda verilen f fonksiyonunun grafiği incelendiğinde x, a'ya soldan ve sağdan yaklaşırken f'in L gerçek sayısına yaklaştığı görülmektedir.

L gerçek sayısına "f fonksiyonunun x = a apsisli noktasındaki **limiti**" denir.

$\lim\limits_{x \to a} f = L$ biçiminde gösterilir.

Sağdan ve soldan limitler birbirine eşit olması durumunda

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L_1 \\ \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L_2\end{array}\right\rangle L_1 = L_2 = L \in R$$

olduğundan f(x) fonksiyonun x = a noktasında limiti vardır ve değeri "L" deriz.

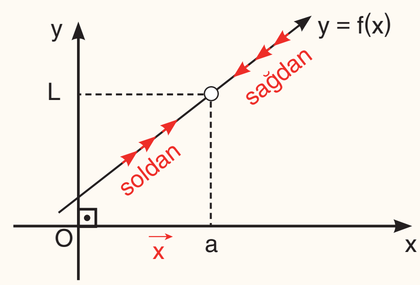
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \quad (L \in R)$ biçiminde gösteririz.

Sağ ve sol limitler birbirine eşit değil ise
$L_1 \neq L_2$ durumunda
f fonksiyonunun x = a noktasında limiti yoktur.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) =$ Yoktur.

Limit kavramını grafik ile inceleyelim.

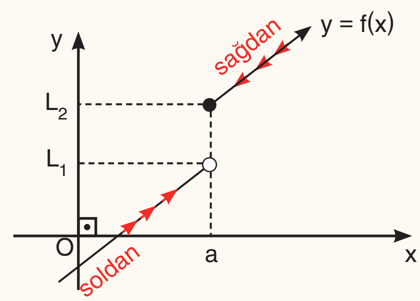
i)



$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$

olduğundan $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L'$ dir.

ii)



$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L_1, \quad \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L_2$

ve $L_1 \neq L_2$ olmadığından

$\lim\limits_{x \to a} f(x) =$ Yoktur.

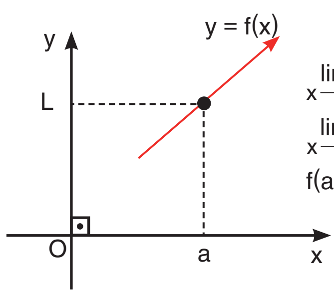
Fonksiyonun x = a noktasında tanımlı olması, limitin değerinin tanımlı olduğu noktadaki değerine eşit olduğu anlamına gelmez!

Bu fonksiyon x = a noktasının etrafında ne yaptığı ile ilgilenir. Fonksiyonun üzerinde hareket edip istenilen x = a noktasına sağdan ve soldan yaklaşımlar yaparak çok yakınında gözlem yapar!

ORİJİNAL BİLGİ NOTLARI

- Limit, ilgili nokta çevresinde fonksiyonun nasıl davrandığı ile ilgilenir. Fonksiyonun o noktadaki değeri veya davranışı ile ilgilenmez.
- x = a noktasında sağdan ve soldan yaklaştığınızda aynı değerleri elde edebiliyorsanız limit vardır ve cevabı bulduğunuz değerdir.
- x = a noktasında fonksiyon tanımlı olsa dahi her zaman limit değerinin fonksiyonun O noktasındaki değerine karşılık geldiği anlamına gelmez.

1)



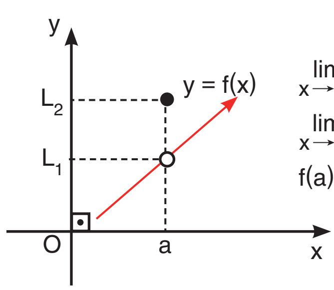
$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L \\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

f(a) = L (tanımlıdır.)

f fonksiyonunun x = a noktasındaki sağdan ve soldan limitleri eşit ve L olduğu için limit değeri vardır.

f fonksiyonu x = a noktasındaki değeri L olduğundan tanımlıdır.

2)



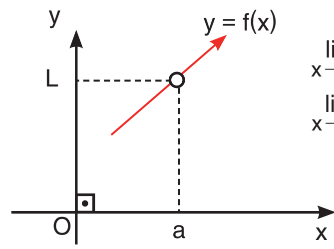
$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L_1 \\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L_1\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$

$f(a) = L_2$ (tanımlıdır.)

f fonksiyonunun x = a noktasındaki sağdan ve soldan limitleri eşit ve L_1 olduğu için limit değeri vardır.

f fonksiyonu x = a noktasındaki değeri L_2 olduğundan tanımlıdır.

3)

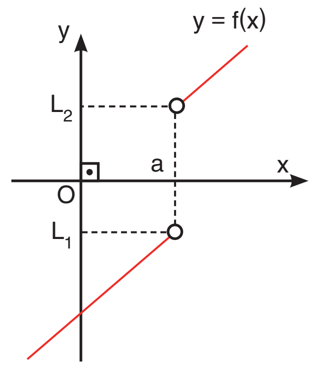


$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L \\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

f fonksiyonunun x = a noktasındaki sağdan ve soldan limitleri eşit ve L olduğu için limit değeri vardır.

f fonksiyonu x = a noktasında tanımlı değildir.

4)

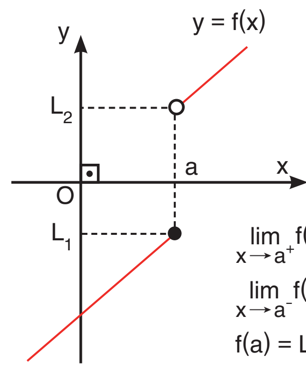


$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L_2 \\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L_1\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to a} f(x)$ Yoktur

f fonksiyonu x = a noktasında sağdan ve soldan limitleri eşit olmadığından fonksiyonun bu noktada limiti yoktur.

f fonksiyonu x = a noktasında tanımlı değildir.

5)

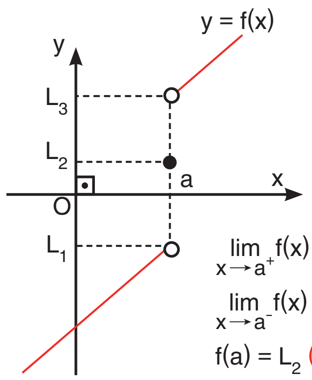


$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L_2 \\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L_1\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to a} f(x)$ yoktur

$f(a) = L_1$ (tanımlıdır.)

f fonksiyonu x = a noktasında sağdan ve soldan limitleri eşit olmadığından fonksiyonun bu noktada limiti yoktur.

6)



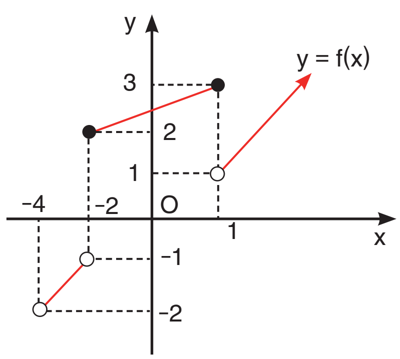
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L_3 \\ \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L_1\end{array}\right\} \lim\limits_{x \to a} f(x) \quad \text{yoktur}$$

$f(a) = L_2$ (tanımlıdır.)

f fonksiyonu x = a noktasında sağdan ve soldan limitleri eşit olmadığından fonksiyonun bu noktada limiti yoktur.

ÖRNEK - 1

Aşağıda (–4, ∞) aralığı üzerinde tanımlı f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre,

$\lim\limits_{x \to (-2)^-} f(x) + \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ **limitlerinin toplamı kaçtır?**

ÇÖZÜM

Grafiği incelersek

x, –2'ye soldan artarak yaklaştığında f(x) değerleri artarak –1 olmaktadır.

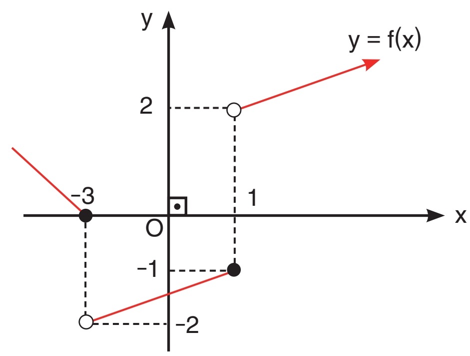
x, 1'e soldan artarak yaklaştığında f(x) değerleri artarak 3 olmaktadır.

O hâlde $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) + \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -1 + 3 = 2$ bulunur.

Cevap: 2

ÖRNEK - 2

Aşağıda gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre,

I. $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

II. $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$

limitlerinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

I. Grafiği inceleyecek olursak x = 1 noktası için

- x, 1'e sağdan azalarak yaklaştığında f(x) değerlerinin azalarak 2'ye yaklaştığı görülmektedir.

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$ olarak ifade ederiz.

- x, 1'e soldan artarak yaklaştığında f(x) değerlerinin artarak –1'e yaklaştığı görülmektedir.

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -1$ olarak ifade ederiz.

O hâlde x = 1 noktasında f fonksiyonunun limitinin var olabilmesi için 1'e soldan ve sağdan yaklaştığımız değerlerin fonksiyonun x = 1 noktasında eşit olması gerekir.

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ olduğundan

$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ yoktur.

Cevap: Yoktur.

II. Grafik incelendiğinde,

- f fonksiyonu x = –3 noktasına sağdan azalan değerler alarak yaklaştığında f(x) değerleri azalarak –2'ye yaklaşmaktadır.
- f fonksiyonu x = –3 noktasına soldan yaklaştığında f(x) değerleri azalarak 0'a yaklaşmaktadır.

$\lim\limits_{x \to (-3)^+} f(x) = -2, \quad \lim\limits_{x \to (-3)^-} f(x) = 0$ 'dır.

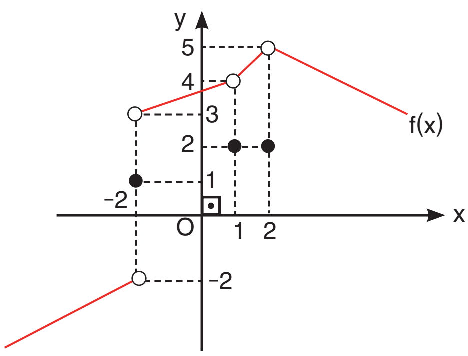
$\lim\limits_{x \to (-3)^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to (-3)^-} f(x)$ olduğundan f fonksiyonunun

$\lim\limits_{x \to -3} f(x)$ yoktur.

Cevap: Yoktur.

ÖRNEK - 3

Aşağıda gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



x = −2, x = 1 ve x = 2 noktalarında var olan limit değerleri toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM

- $x = -2$ için

$\lim_{x \to (-2)^+} f(x) = 3$

$\lim_{x \to (-2)^-} f(x) = -2$

O hâlde $\lim_{x \to (-2)^+} f(x) \neq \lim_{x \to (-2)^-} f(x)$ olduğundan limit yoktur.

- $x = 1$ için

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 4$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 4$

O hâlde, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = 4$ olduğundan

f fonksiyonunun x = 4 noktasında limiti vardır.

$\lim_{x \to 1} f(x) = 4$'tür.

- $x = 2$ için

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 5$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 5$

O hâlde, $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = 5$ olduğundan

f fonksiyonunun x = 2 noktasında limiti vardır.

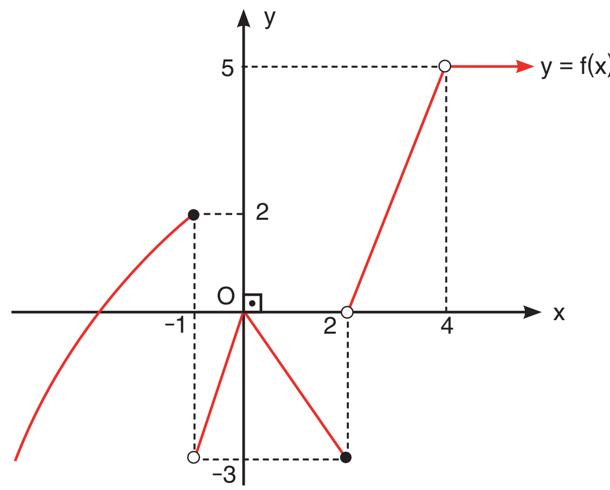
$\lim_{x \to 2} f(x) = 5$'tir.

Var olan limit toplamı = 4 + 5 = 9

Cevap: 9

ÖRNEK - 4

Aşağıda gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre,

I. $\lim_{x \to (-1)^-} f(x) = -3$

II. $\lim_{x \to 2} f(x) = -3$

III. $\lim_{x \to 4} f(x) = 5$

ifadelerinden hangileri doğrudur?

ÇÖZÜM

I. f fonksiyonu x = −1 noktasına soldan artarak yaklaştığında f(x) değerleri artarak 2'ye yaklaşmaktadır.

$\lim_{x \to (-1)^-} f(x) = 2$ Yanlış

II. • f fonksiyonu x = 2 noktasında sağdan azalarak yaklaştığında f(x) değerleri azalarak 0'a yaklaşmaktadır.

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 0$

• f fonksiyonu x = 2 noktasına soldan artarak yaklaştığında f(x) değerleri azalarak -3'e yaklaşmaktadır.

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -3$

O hâlde $\lim_{x \to 2^+} f(x) \neq \lim_{x \to 2^-} f(x)$ olduğundan

$\lim_{x \to 2} f(x)$ = yoktur. Yanlış

III. f fonksiyonunda x = 4 noktasına sağdan azalan değerler, soldan artan değerler ile yaklaşıldığında f(x) değerleri 5'e yaklaşmaktadır.

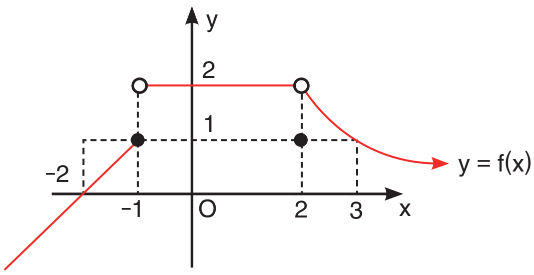
$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^-} f(x) = 5$

O hâlde $\lim_{x \to 4} f(x) = 5$'tir. Doğru

Cevap: Yalnız III

ÖRNEK - 5

Aşağıda gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre,

$$\lim_{x\to 3} f(x) + \lim_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim_{x\to a} f(x)$$

eşitliğini sağlayan a tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM

- x = 3 noktasına soldan ve sağdan yaklaştığında f(x) değerlerinin 1'e yaklaştığı görülmektedir. x = 3 noktasına giderken f(x)'in limiti 1 olarak bulunur.

  O hâlde $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = 1$ olduğundan

  $\lim_{x\to 3} f(x) = 1$'dir.

- x, −1'e soldan artarak yaklaştığımızda f(x) değeri artarak 1'e yaklaşmaktadır.

  O hâlde $\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = 1$'dir.

$\lim_{x\to 3} f(x) + \lim_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim_{x\to a} f(x)$ eşitliğinde

$$1 + 1 = \lim_{x\to a} f(x)$$

$2 = \lim_{x\to a} f(x)$ elde edilir.

a tam sayısı için f fonksiyonunun limitinin 2 olduğu noktalar isteniyor.

Grafiğe bakılırsa $x \in (-1, 2)$ aralığında f sabit fonksiyon olup f(x) = 2'dir.

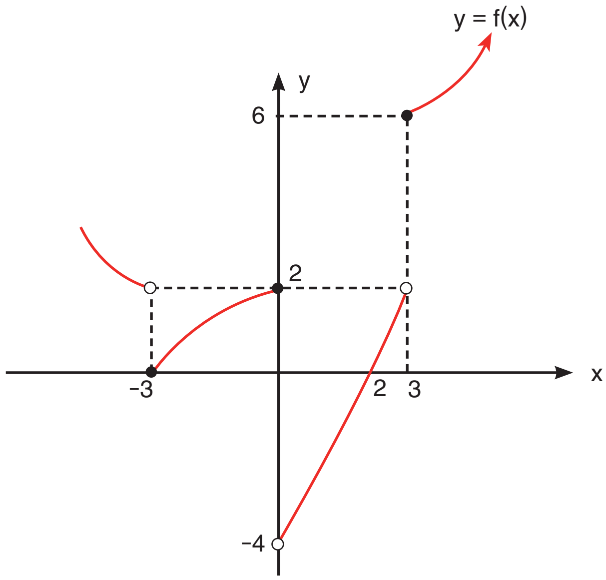
O hâlde (−1, 2) aralığındaki tam sayılar 0, 1 ve 2'dir.

a tam sayı değerleri toplamı 0 + 1 + 2 = 3'tür.

Cevap: 3

ÖRNEK - 6

Aşağıda gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonun grafiği verilmiştir.



Buna göre,

$$\lim_{x\to 0^+} -f(x) + \lim_{x\to(-3)^-} f(-x)$$

limitler değerinin toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM

- f fonksiyonu x = 0 noktasına sağdan azalarak yaklaştığında f(x) değeri azalarak −4'e yaklaşmaktadır.

  $$\lim_{x\to 0^+} (-f(x)) = -\lim_{x\to 0^+} f(x) = -(-4) = 4\text{'tür.}$$

- $x \to -3{,}000...1$

  $-x \to 3{,}000...1$

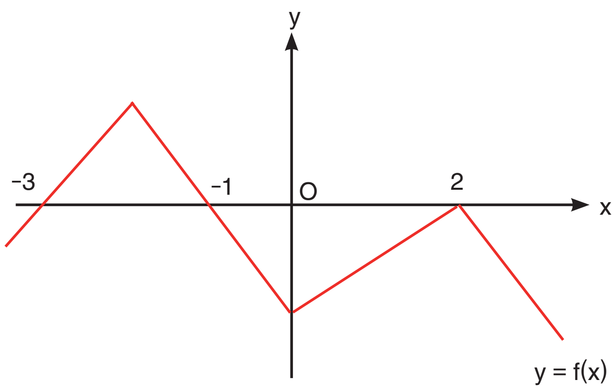
O hâlde $\lim_{x\to -3^-} f(-x) = \lim_{x\to 3^+} f(x)$ hâline dönüşür.

f fonksiyonu x = 3 noktasına sağdan azalarak yaklaşırken f(x) değerleri azalarak 6'ya yaklaşmaktadır.

4 + 6 = 10 bulunur.

Cevap: 10

ÖRNEK - 7



Yukarıda gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyon grafiği verilmiştir.

$$g(x) = \frac{2f(x) - |f(x)|}{f(x)}$$

fonksiyonu tanımlıyor.

Buna göre,

$$\lim_{x \to (-1)^-} g(x) + \lim_{x \to (-3)^-} g(x)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$-3 < x < -1$ aralığında $f(x) > 0$ olduğundan, $|f(x)| = f(x)$'tir.

$$\lim_{x \to (-1)^-} \frac{2f(x) - f(x)}{f(x)} = \lim_{x \to (-1)^-} 1 = 1\text{'dir.}$$

$x < -3$ aralığında $f(x) < 0$ olduğundan $|f(x)| = -f(x)$'tir.

$$\lim_{x \to -2} \frac{2f(x) - (-f(x))}{f(x)} = \lim_{x \to -2} \frac{3f(x)}{f(x)} = 3\text{'tür.}$$

İstenilen ifade $1 + 3 = 4$ olarak bulunur.

Cevap: 4

ÖRNEK - 8

Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonu için

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 4$$

Buna göre,

I. $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 4$'tür.

II. $f(3) = 4$'tür.

III. $\lim_{x \to 3} f(x) - f(3) = 0$'dır.

ifadelerinden hangileri her zaman doğrudur?

ÇÖZÜM

I. $\lim_{x \to 3} f(x) = 4$ ifadesinin anlamı

f fonksiyonunun $x = 3$ noktasında sağ ve sol limitlerinin eşit olmasıdır.

$\lim_{x \to 3} f(x) = 4 \Rightarrow \lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^-} f(x) = 4$'tür. Doğru

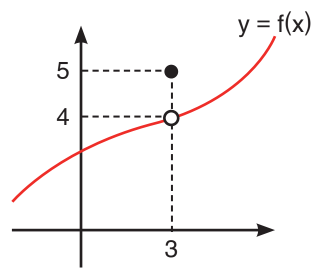
II. f fonksiyonunun $x = 3$ noktasında tanımlı olmasının bu noktadaki limitinin varlığına etkisi yoktur.

$\lim_{x \to 3} f(x) = f(3) = 4$ eşitliği

her zaman sağlanmayabilir.

II. öncül her zaman doğru değildir.

III.



$\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$

Yukarıdaki şekilde $\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^-} f(x) = 4$

$f(3) = 5$ değerini almaktadır.

$\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$ her zaman eşit olmayabilir.

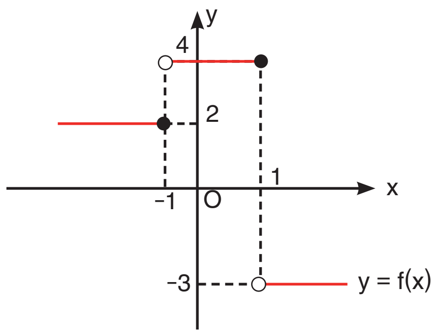
III. öncül her zaman doğru değildir.

Cevap: Yalnız I

ORİJİNAL MATEMATİK

ÖRNEK - 9

Aşağıda gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı parçaları doğrusal f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre,

$$\lim_{x\to(-2)^+} f(x+1) + \lim_{x\to 4^-} f(x-1)$$

toplamının değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

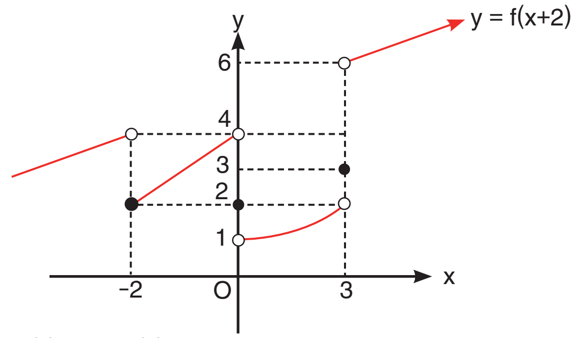
- x, –2'ye sağdan azalarak yaklaştığında (x + 1) ifadesi –1'e sağdan yaklaşacaktır.
  $x \to (-2)^+ = -1{,}999...9$ alırsak
  $(x+1) \to (-1{,}999...9 + 1) = -0{,}999...9$ olur.
  $\lim_{x\to(-2)^+} f(x+1) = \lim_{x\to(-1)^+} f(x)$ eşitliği elde edilir.
  x, –1'e sağdan yaklaştığında f(x) değerleri 4'e yaklaşmaktadır.
  $\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = 4$'tür.

- x, 4'e soldan yaklaştığında (x – 1) ifadesi 3'e soldan yaklaşmaktadır.
  $x \to 4^- = 3{,}999...9$ alırsak
  $(x-1) \to (3{,}999...9 - 1) = 2{,}999...9$ olur.
  $\lim_{x\to 4^-} f(x-1) = \lim_{x\to 3^-} f(x)$ eşitliği elde edilir.
  f fonksiyonu x > 1 için sabit fonksiyon olup
  $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -3$'tür.
  Bu durumda 4 – 3 = 1 bulunur.

Cevap: 1

ÖRNEK - 10

Aşağıda gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı y = f(x+2) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

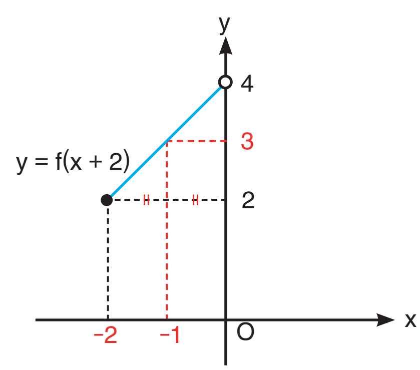


$$\frac{f(1)\cdot \lim_{x\to 2^-} f(x)}{\lim_{x\to 5^+} f(x)}$$ **oranı kaçtır?**

ÇÖZÜM

i) y = f(x + 2) fonksiyonunun grafiğine göre, f(1)'in değerini bulabilmek için f(x + 2) fonksiyonunda x = –1 noktasının görüntüsüne bakmalıyız.

f(x + 2) fonksiyonun $x \in [-2, 0)$ aralığında benzerlik yapalım.



f fonksiyonunda x = 1 için f(1) değeri, f(x + 2) fonksiyonunda f(–1) = 3'tür.

ii) f fonksiyonunda x değeri, 2'ye soldan yaklaşırken f(x+2) fonksiyonunda x değeri, 0'a soldan yaklaşmalıdır.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x+2) = 4$$

iii) f fonksiyonunda x değeri, 5'e sağdan yaklaşırken f(x+2) fonksiyonunda x değeri, 3'e sağdan yaklaşmalıdır.

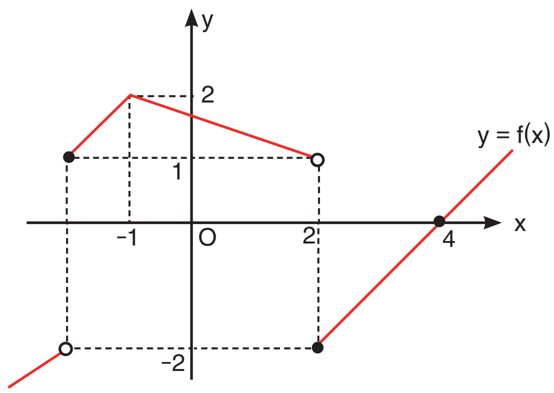
$$\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x+2) = 6$$

$$\frac{f(1)\cdot \lim_{x\to 2^-} f(x)}{\lim_{x\to 5^+} f(x)} = \frac{3\cdot 4}{6} = 2$$

Cevap: 2

ORİJİNAL MATEMATİK

ÖRNEK - 11



Yukarıda gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı parçaları doğrusal f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre,

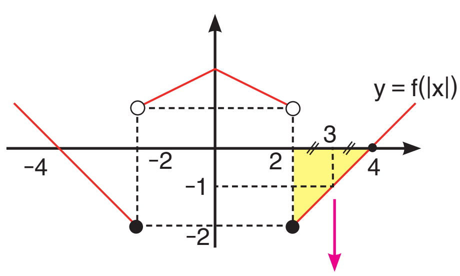
$$\left|\lim_{x\to 2^+} f(x)\right| + \lim_{x\to -3} f(|x|)$$

ifadesinin toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM

- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -2 \Rightarrow \left|\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)\right| = 2$
- $\lim\limits_{x\to (-3)} f(|x|) = \lim\limits_{x\to 3} f(x) = -1$ olacaktır.

Bunu grafik ile açıklayalım.



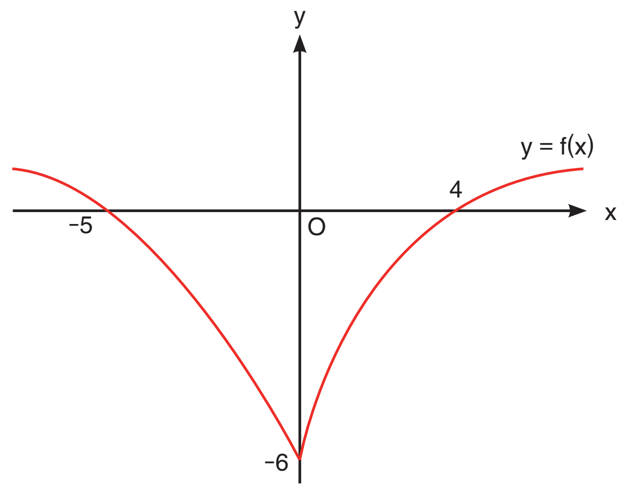
Sarı boyalı üçgende benzerlik yaparsak $f(3) = -1$ bulunur.

$$\left|\lim_{x\to 2^+} f(x)\right| + \lim_{x\to -3} f(|x|) = 2 - 1 = 1$$

Cevap: 1

ÖRNEK - 12

Aşağıda gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonunun grafiği ve g fonksiyonu verilmiştir.



$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & f(x) \geq 0 \\ 4x - 2, & f(x) < 0 \end{cases}$$

fonksiyonu için

I. $\lim\limits_{x\to 4^+} g(x) = 17$

II. $\lim\limits_{x\to (-5)^+} g(x) = 26$

III. $\lim\limits_{x\to f(0)^-} g(x) = 37$

Yukarıdaki ifadelerden hangileri doğrudur?

ÇÖZÜM

$4 < x < \infty$ aralığında $f(x) > 0$

$-5 < x < 4$ aralığında $f(x) < 0$

$-\infty < x < -5$ aralığında $f(x) > 0$

I. $x \to 4^+$ için $f(x) > 0$ olur.

$\lim\limits_{x\to 4^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} (x^2 + 1) = 17$ (Doğru)

II. $x \to -5^+$ için $f(x) < 0$ olur.

$\lim\limits_{x\to (-5)^+} g(x) = \lim\limits_{x\to (-5)^+} (4x - 2) = -22$ (Yanlış)

III. $f(0) = -6$

$x \to (-6)^-$ için $f(x) > 0$ 'dır.

$\lim\limits_{x\to (f(0))^-} g(x) = \lim\limits_{x\to (-6)^-} g(x) = \lim\limits_{x\to (-6)^-} (x^2 + 1) = 37$

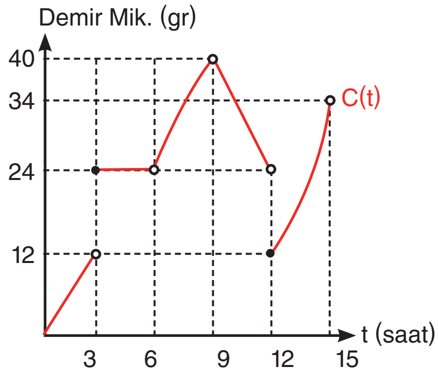
(Doğru)

Cevap: I ve III

ORİJİNAL MATEMATİK

ÖRNEK - 13

Bir laboratuvarda yapılan çalışmada, deney faresinin vücuduna enjekte edilen bir ilacın [0,15) saat aralığında kan hücresindeki demir miktarını gösteren grafik aşağıda verilmiştir.



C(t) fonksiyonu ile ilgili olarak başlangıçtan itibaren

I. 179,9 dakika sonra kandaki demir miktarı yaklaşık olarak 12 gramdır.

II. 11. saatin bitmesine çok az bir süre kala kandaki demir miktarı yaklaşık 24 gramdır.

III. 9. saatin başlamasına çok az bir süre kaldığında demir miktarı 40 grama yaklaşır.

öncüllerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II D) II ve III E) I, II ve III

ÇÖZÜM

I. 180 dakika = 3 saat

179,9 dakika 3 saatten çok çok az küçük bir zaman kavramıdır.

Yani t→(179,9) dakika ifadesi $t \to 3^-$ demektir.

Grafiği incelersek

t, 3'e soldan artarak yaklaştığında C(t) artarak 12 grama yaklaşır. (Doğru)

II. 11. saatin bitmesine çok çok az bir süre kalması, 12. saate soldan yaklaşmaktadır.

t, 12'ye artarak soldan yaklaştığında C(t) azalarak 24 grama yaklaşır. (Doğru)

III. 9. saatin başlamasına çok az bir süre kalması, 8. saatin bitmek üzere olduğu anlamına gelir.

Yani t = 8,999...9 ifadesi t'nin 9'a soldan yaklaşması demektir.

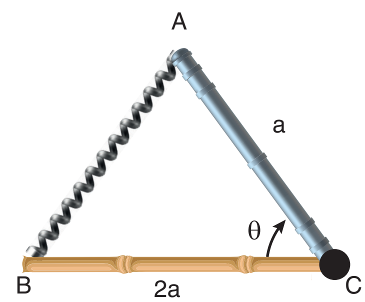
t, 9'a artarak soldan yaklaştığında C(t) artarak 40 grama yaklaşır. (Doğru)

Cevap: I, II ve III

ORİJİNAL MATEMATİK

ÖRNEK - 14

Uzunluğu 2a birim olan bir tahta çubuk ile uzunluğu a birim olan bir demir çubuk kullanarak aşağıdaki şekilde olduğu gibi C noktasından bir menteşe yardımıyla aşağı ve yukarı yönlü hareket edebilen bir düzenek yapılmıştır.



Tahtanın uç noktası olan B noktası ile demir çubuğun uç noktası olan A noktasına genişleyebilen bir yay takılmıştır.

Demir çubuk ile tahta çubuk arasındaki θ açısı 90° yaklaşırken yayın uzunluğu (|AB|) $3\sqrt{5}$ birime yaklaşmaktadır.

Buna göre, $(a^2 + a)$ değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

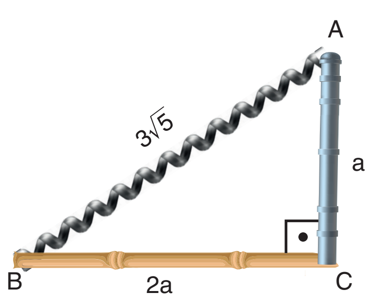
A ve B noktalarındaki yaylar genişletilip

$$m(\widehat{ACB}) = \theta = 90^\circ$$

olduğunda |AB| uzunluğu hipotenüs uzunluğu olacaktır.

O hâlde

$$\lim_{\theta \to 90^\circ} |AB| = |BC|^2 + |AC|^2 \text{ olur.}$$



$$a^2 + 4a^2 = 45$$
$$a^2 = 9$$
$$a = 3$$
$$a^2 + a = 3^2 + 3 = 12\text{'dir.}$$

Cevap: 12